ある種の非単一特性な方程式系に対する浜田の定理について (微分方程式と超函数)

中村, 玄

数理解析研究所講究録
281巻 1976年 163-175

ある種の非単一特性な方程式系に対する浜田の定理について。

都立大 理 大学院 中村 玄

§1. 序 実或は複素領域における線形偏微分方程式(系)に対するコーシー問題に関して初期データが特異性をもつ場合にその特異性がどの様に伝播されるかという問題については、既に知られた幾つかの仕事がある。

実領域では、まず R. Courant - P.D. Lax (1), D. Ludwig (4) らが単一或は多重特性な方程式系(主として双曲型)について考察し、解の特異性が初期データの特異性を載せている特性面に沿ってのみ現われる事を示した。ついで D. Ludwig - B. Granoff (2) は、特性根の多重度が一様でないある種の定数係数双曲型方程式系を扱い、解の特異性が特性面の他に相交る特性面を結ぶ曲面族の包絡面に沿っても現われる事を示した。

複素領域では、Y. Hamada (3), C. Wagschal (7), J.C. Paris (5) らが主として初期データが pole をもつ場合に、単一或は多重特性な方程式(系)について考察し、実領域の場合と同様な結果を

得た他，解が特性面上で pole 或は essential singularity，対数分岐をもつなどの複素領域の場合に固有な性質が明らかにされた。最近 J. Urabe (6) は，微分作用素 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}+x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ を含む様なある種の非単一特性な方程式について解が特定の特性面上で essential singularity，対数分岐をもつ事を示した。

ここでは，複素領域において D. Ludwig − B. Granoff (2) の結果がある種の変数係数の方程式系に対して拡張できる事を示す。これまでの諸結果では，解の特異性は初期データの特異性を載せている特性面上に限られ，そこでの分岐は対数分岐であったが，ここに示す結果では解は解析接続により上述の如き包絡面（実は浜田先生の指摘により，これも方程式系の特性面となる。）上でも特異性を帯び，そこでは代数的に分岐するという違いがみられる。なお，D. Ludwig − B. Granoff (2) が構成した漸近解の exactness はここの結果の系として得られることを注意しておく。

§2．仮定及び結果． $(t,x)=(t,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ とし，次の方程式系を考える；

$$(2.1)\quad \mathcal{L}u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{n}A^{\mu}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_\mu}+B(t,x)u=0\ ,$$

ここで，A^μ，B は原点の近傍で正則な $k\times k$ 行列，u はベクトル値関数である。なお，以下では $A^0=I$（恒等行列），$x_0=t$

ともかき，repeated index μ, ν は夫々 $1 \sim n$，$0 \sim n$ 迄加えるものとする。

方程式系 (2.1) に対して次の仮定(イ)〜(ヘ)を設ける。

(イ) 各 $(t,x) \sim 0$，$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \sim (1, 0, \cdots, 0)$ に対して，$-A^\mu(t,x)\xi_\mu$ は k ケの eigenvalues $\lambda^l(t,x;\xi)$ $(1 \le l \le k)$ をもち，対応する eigenvectors は complete set をなす。

(ロ) $\lambda^+ \equiv \lambda^{k-1}$，$\lambda^- \equiv \lambda^k$ とするとき，$\lambda^+ = \lambda^-$ at $(t,x) = 0$，$\xi = (1, 0, \cdots, 0)$。

(ハ) 各 $(t,x) \sim 0$，$\xi \sim (1, 0, \cdots, 0)$ に対し $\{\lambda^l, \lambda^+ ; 1 \le l \le k-2\}$，$\{\lambda^l, \lambda^- ; 1 \le l \le k-2\}$ の元は互いに相異なる。

(ニ) eigenvalue $\lambda^\pm$ と対応する eigenvectors $R^\pm$ は $(t,x) \sim 0$，$\xi \sim (1, 0, \cdots, 0)$ で正則。

(ホ) $\lambda^+_t - \lambda^-_t + \nabla_\xi \lambda^+ \cdot \nabla_x \lambda^- - \nabla_\xi \lambda^- \cdot \nabla_x \lambda^+ = 0$ for $(t,x) \sim 0$，$\xi \sim (1, 0, \cdots, 0)$。

(ヘ) $\varphi^\pm(t,x)$，$\Phi(t,x,\tau)$ を

$$\begin{cases} \varphi^\pm_t = \lambda^\pm(t,x;\nabla_x \varphi^\pm), \quad \varphi^\pm(0,x) = x_1 \\ \Phi_t \pm \Phi_\tau = \lambda^\pm(t,x;\nabla_x \Phi), \quad \Phi(t,x,\mp) = \varphi^\mp(t,x) \end{cases} \qquad \text{(複号同順)}$$

で定義するとき，$\Phi(0,0,\tau) \neq 0$ for $\tau \sim 0$。

注意；仮定(ホ)は過剰決定系 $\Phi_t \pm \Phi_\tau = \lambda^\pm(t,x;\nabla_x \Phi)$，$\Phi(t,x,\mp t) = \varphi^\mp(t,x)$ の積分可能条件である。

ところで仮定(ヘ)と Wierstrass の予備定理により，$^\exists P(t,x,\tau)$；τ の特殊擬多項式，$^\exists \Psi(t,x,\tau)$；$(t,x,\tau) \sim 0$ で正則，$\neq 0$，$\Phi(t,x,\tau) = \Psi(t,x,\tau)P(t,x,\tau)$。そこで $P(t,x,\tau)$ の（代数的）既

約分解を $P(t,x,\tau)=\prod_{i=1}^{n} P_i(t,x,\tau)^{\nu_i}$，$P_i$，$P_j$ $(i\neq j)$ の終結式を ω_{ij}，P_iの判別式を ω_i とする。

さて，次のコーシー問題(C.P.)を考える；

$$(\mathrm{C.P.})\begin{cases} \text{方程式}\,(2.1), \\ \text{初期値}\ u(0,x)\ \text{は}\ x_1=0\ \text{上に pole をもつ。} \end{cases}$$

重畳原理により，初期値 $u(0,x)$ としては例えば次の場合を考えれば十分である； $u(0,x)=(-1)^{q-1}(q-1)!\,\dfrac{w^+(x')}{x_1{}^q}R^+(0,x;1,0,\cdots,0)$，ここで $q\in\mathbb{N}$，$x'=(x_2,\cdots,x_n)$，$w^+(x')$ は $x'\sim 0$ で正則な関数。この場合に相当するコーシー問題を (C.P.)$'$ とすると，以上の状況下で次の定理がなりたつ。

<u>定理</u>　原点の近傍でコーシー問題(C.P.)$'$の解 $u(t,x)$ が唯1つ存在し，次式で与えられる；

$$(2.2)\quad u(t,x)=\frac{F^+(t,x)}{[\varphi^+(t,x)]^q}+G^+(t,x)\log\varphi^+(t,x)+\frac{F^-(t,x)}{[\varphi^-(t,x)]^q}+G^-(t,x)\log\varphi^-(t,x)+$$
$$+\int_{-t}^{t}\left\{\frac{F(t,x,\tau)}{[\Phi(t,x,\tau)]^q}+G(t,x,\tau)\log\Phi(t,x,\tau)\right\}d\tau+\sum_{l=1}^{k-2}\left\{\frac{F^l(t,x)}{[\varphi^l(t,x)]^q}+G^l(t,x)\log\varphi^l(t,x)\right\}+$$
$$+H(t,x)$$

ここで F^l，$F^\pm$，F，G^l，$G^\pm$，G，H は原点の近傍で正則なベクトル値関数，$\varphi^l(t,x)$ は $\varphi^l_t=\lambda^l(t,x;\nabla_x\varphi^l)$，$\varphi^l(0,x)=x_1$ で定義される phase である。更に(2.2)の右辺の積分を調べると，解 $u(t,x)$ は一般に $D_{ij}\equiv\{(t,x);\ \omega_{ij}(t,x)=0\}$ $(1\leq i,j\leq n,\ i\neq j)$ で pole をもつ他 $D_i\equiv\{(t,x);\ \omega_i(t,x)=0\}$ $(1\leq i\leq n)$ のまわりで代数的に分岐し，D_i 上で無限大になる事が分る。

注意：D_i，D_{ij} 上の解 $u(t,x)$ の特異性は，次節で構成する漸近解を収束域外に解析接続したときに生じる。又集合 D_i，D_{ij} は，浜田先生の指摘により方程式(2.1)の特性面である。

次に定理の諸仮定をみたし，解が特性面 $\varphi^{\pm}=0$ 以外の新な特性面のまわりで分岐し，その上で無限大になる様な例をあげておく。

例：コーシー問題：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+x_2, & 0 \\ 0, & -\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & t+1 \end{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ u_1(0,x)=0, \quad u_2(0,x)=\dfrac{1}{x_1} \end{cases}$$

の解は，$u_1(t,x)=\dfrac{1}{\sqrt{\psi}}\left\{\log\left(\dfrac{t+\frac{t^2}{2}+x_2-\sqrt{\psi}}{t+\frac{t^2}{2}+x_2+\sqrt{\psi}}\right)-\log\left(\dfrac{x_2+\frac{t^2}{2}-\sqrt{\psi}}{x_2+\frac{t^2}{2}+\sqrt{\psi}}\right)\right\}$

$\psi=\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{2}{3}t^3+(x_2+1)t^2+2x_2t+2x_1+x_2^2$，$u_2(t,x)=\dfrac{1}{x_1-\frac{t^3}{6}}$ で与えられる。（注；浜田先生から予稿集の $u_1(t,x)$ が間違っている事を指摘して頂いた。）$u_1(t,x)$ はその形から特性面 $\psi=0$ 上で代数的に分岐し，無限大になる。しかしこの特性面 $\psi=0$ は $t=0$ $x_1=0$ を通らない。

§3．定理の証明の概略。

(i)．漸近解の構成。wave forms $\{f_j(\zeta)\}_{j=-1}^{\infty}$ を

$$(3.1)\begin{cases} \dfrac{d}{d\zeta}f_j(\zeta)=f_{j-1}(\zeta), \quad f_0(\zeta)=\dfrac{(-1)^{q-1}(q-1)!}{\zeta^q}, \quad f_1(\zeta)=\dfrac{(-1)^{q-2}(q-2)!}{\zeta^{q-1}}, \cdots\cdots \\ f_{q-1}(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta}, \quad f_q(\zeta)=\log\zeta, \quad f_{q+m}(\zeta)=\dfrac{\zeta^m}{m!}\log\zeta-\dfrac{A_m}{m!}\zeta^m \end{cases}$$

但し $A_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$, $A_0 = 0$

により定め, (3.2) $u(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} [f_j(\varphi^+(t,x))a_j^+(t,x) + f_j(\varphi^-(t,x))a_j^-(t,x) + \int_{-t}^{t} f_j(\Phi(t,x,\tau))b_j(t,x,\tau)] + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-2} f_j(\varphi^i(t,x))\, a_j^i(t,x)$ なる形で漸近解を求める。$b_j(t,x,\tau) = \beta_j^+(t,x,\tau)R^+(t,x;\nabla_x\Phi(t,x,\tau)) + \beta_j^-(t,x,\tau)R^-(t,x;\nabla_x\Phi(t,x,\tau))$ とおいて, D. Ludwig – B. Granoff (2) P560 ~ P563 の論法にならって計算すると, (3.2) がコーシー問題 (C.P.)' の漸近解となる為の十分条件を得る: $\beta_j^{\pm}(t,x,\tau) \equiv 0$ $(j<0)$, $h_j^{\pm}(t,x) \equiv 0$ $(j<1)$ とするとき,

$$(3.3)\begin{cases} a_j^{\pm}(t,x) = \alpha_j^{\pm}(t,x)R^{\pm}(t,x;\nabla_x\varphi^{\pm}(t,x)) + h_j^{\pm}(t,x), \\ a_j^i(t,x) = \alpha_j^i(t,x)R^i(t,x;\nabla_x\varphi^i(t,x)) + h_j^i(t,x) \quad (1 \le i \le k-2) \end{cases}$$

$$(3.4)^+\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\alpha_j^+ - \nabla_\xi\lambda^+\cdot\nabla_x\alpha_j^+ + L^+\mathcal{L}(R^+)\alpha_j^+ = -L^+\mathcal{L}(h_j^+) - 2L^+\frac{\partial R^-}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\beta_{j-1}^-}{\partial x_\mu}(t,x,t), \\ 2\beta_j^-(t,x,t) = -L^-\mathcal{L}(\alpha_j^+R^+ + h_j^+) + 2L^-\frac{\partial R^+}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\beta_{j-1}^+}{\partial x_\mu}(t,x,t) \end{cases}$$

$$(3.4)^-\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\alpha_j^- - \nabla_\xi\lambda^-\cdot\nabla_x\alpha_j^- + L^-\mathcal{L}(R^-)\alpha_j^- = -L^-\mathcal{L}(h_j^-) - 2L^-\frac{\partial R^+}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\beta_{j-1}^+}{\partial x_\mu}(t,x,-t), \\ 2\beta_j^+(t,x,-t) = -L^+\mathcal{L}(\alpha_j^-R^- + h_j^-) + 2L^+\frac{\partial R^-}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\beta_{j-1}^-}{\partial x_\mu}(t,x,-t) \end{cases}$$

$$(3.4)^i \quad \frac{\partial}{\partial t}\alpha_j^i - \nabla_\xi\lambda^i\cdot\nabla_x\alpha_j^i + L^i\mathcal{L}(R^i)\alpha_j^i = -L^i\mathcal{L}(h_j^i) \quad (1 \le i \le k-2)$$

$$(3.5)\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\beta_j^+ - \nabla_\xi\lambda^+\cdot\nabla_x\beta_j^+ + L^+\left(\frac{\partial}{\partial\tau}R^+ + \mathcal{L}(R^+)\right)\beta_j^+ + L^+\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}R^- + \mathcal{L}(R^-)\right)\beta_j^- \\ = 2L^+\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{L^+\frac{\partial R^-}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\beta_{j-1}^-}{\partial x_\mu}R^+ - L^-\frac{\partial R^+}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\beta_{j-1}^+}{\partial x_\mu}R^-\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\beta_j^- - \nabla_\xi \lambda^- \cdot \nabla_x \beta_j^- + L^-\left(\frac{\partial}{\partial \tau}R^+ + \mathcal{L}(R^+)\right)\beta_j^+ + L^-\left(-\frac{\partial}{\partial \tau}R^- + \mathcal{L}(R^-)\right)\beta_j^- \\ = 2L^- \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{ L^+ \frac{\partial R^-}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \beta_{j-1}^-}{\partial x_\mu} R^+ - L^- \frac{\partial R^+}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \beta_{j-1}^+}{\partial x_\mu} R^- \right\} \end{cases}$$

$$(3.6)\quad \alpha_j^+(0,x)R^+(0,x;1,0,\cdots,0) + \alpha_j^-(0,x)R^-(0,x;1,0,\cdots,0) + \sum_{i=1}^{k-2}\alpha_j^i(0,x) \times$$
$$\times R^i(0,x;1,0,\cdots,0) = \begin{cases} u^+(x)R^+(0,x;1,0,\cdots,0) & \text{for } j=0 \\ -\left\{h_j^+(0,x) + h_j^-(0,x) + \sum_{i=1}^{k-2} h_j^i(0,x)\right\} & \text{for } j\geq 1 \end{cases}$$

ここで，R^l $(1\leq l\leq k-2)$ は eigenvalues λ^l $(1\leq l\leq k-2)$ に対応する eigenvectors，$\{L^l, L^+, L^-;\ 1\leq l\leq k-2\}$ は $\{R^l, R^+, R^-;\ 1\leq l\leq k-2\}$ の dual basis，$h_j^\pm$，h_j^i は夫々 $A^\nu \varphi^\pm_{x_\nu} a_j^\pm + \mathcal{L}(a_{j-1}^\pm) + 2\beta_{j-1}^\pm(t,x,\mp t)R^\mp =$ $= \mp 2L^+ \frac{\partial R^-}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \beta_{j-2}^-}{\partial x_\mu}(t,x,\pm t)R^+ \pm 2L^- \frac{\partial R^+}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \beta_{j-2}^+}{\partial x_\mu}(t,x,\pm t)R^-$，$A^\nu \varphi^i_{x_\nu} a_j^i + \mathcal{L}(a_{j-1}^i) = 0$ の特殊解である。なお，上の十分条件を導くに当って，

$$(3.7)\begin{cases} L^+\left\{\mathcal{L}(a_{j-1}^\pm) + 2\beta_{j-1}^\pm(t,x,\mp t)R^\mp \pm 2L^+ \frac{\partial R^-}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \beta_{j-2}^-}{\partial x_\mu}(t,x,\pm t)R^+ \mp \right. \\ \qquad \left. \mp 2L^- \frac{\partial R^+}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \beta_{j-2}^+}{\partial x_\mu}(t,x,\pm t)R^- \right\} = 0 \\ L^-\left\{\mathcal{L}(a_{j-1}^\pm) + 2\beta_{j-1}^\pm(t,x,\mp t)R^\mp \pm 2L^+ \frac{\partial R^-}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \beta_{j-2}^-}{\partial x_\mu}(t,x,\pm t)R^+ \mp \right. \\ \qquad \left. \mp 2L^- \frac{\partial R^+}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \beta_{j-2}^+}{\partial x_\mu}(t,x,\pm t)R^- \right\} = 0 \end{cases}$$

を仮定した。明らかに $\alpha_j^\pm$，α_j^i は $(3.4)^\pm$，$(3.4)^i$，(3.6) より逐次求まる。次に $\beta_j^\pm$ が (3.4)，(3.5) より逐次求まる事をみよう。いま $t_1 = \frac{1}{2}(t+\tau)$，$t_2 = \frac{1}{2}(t-\tau)$ と変数変換し，変換された $\beta_j^\pm$，$\lambda^\pm$ も同じ記号でかくと，各 $\beta_j^\pm$ を定める式は次の形をした境界値問題 (B.P.) になる：

$$
(\mathrm{B.P.})\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t_1}\beta^+ - \nabla_\xi\lambda^+\cdot\nabla_x\beta^+ + P^+\beta^+ + P^-\beta^- = f^+, \\[2mm]
\dfrac{\partial}{\partial t_2}\beta^- - \nabla_\xi\lambda^-\cdot\nabla_x\beta^- + Q^+\beta^+ + Q^-\beta^- = f^-, \\[2mm]
\beta^+(0,x,t_2) = \gamma^+(t_2,x), \quad \beta^-(t_1,x,0) = \gamma^-(t_1,x)
\end{cases}
$$

ここで $P^\pm$, $Q^\pm$, $f^\pm$, $\gamma^\pm$ は原点の近傍で正則な関数である。

Lemma 3.1. 境界値問題(B.P.)は原点の近傍で唯1つの正則解 $\beta^\pm(t_1,x,t_2)$ をもつ。従って各 $\beta_j^\pm$ は(3.4)(3.5)より求まる。

証明は逐次近似法による。

(ii) 漸近解(3.2)の exactness

Lemma 3.2. $\tilde{\lambda}_\mu^\pm$, $\tilde{P}^\pm$, $\tilde{Q}^\pm$, $\tilde{f}^\pm$ を境界値問題(B.P.)における $-\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}\lambda^\pm$, $-P^\pm$, $-Q^\pm$, $f^\pm$ の majorant とする。いま $\tilde{\beta}^\pm$ が、

$$
\frac{\partial}{\partial t_1}\tilde{\beta}^+ \gg \sum_{\mu=1}^{n}\tilde{\lambda}_\mu^+\frac{\partial\tilde{\beta}^+}{\partial x_\mu} + \tilde{P}^+\tilde{\beta}^+ + \tilde{P}^-\tilde{\beta}^- + \tilde{f}^+
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t_2}\tilde{\beta}^- \gg \sum_{\mu=1}^{n}\tilde{\lambda}_\mu^-\frac{\partial\tilde{\beta}^-}{\partial x_\mu} + \tilde{Q}^+\tilde{\beta}^+ + \tilde{Q}^-\tilde{\beta}^- + \tilde{f}^-
$$

$$
\tilde{\beta}^+(0,x,t_2) \gg \gamma^+(t_2,x), \quad \tilde{\beta}^-(t_1,x,0) \gg \gamma^-(t_1,x)
$$

をみたすならば、$\tilde{\beta}^\pm$ は境界値問題(B.P.)の解 $\beta^\pm$ の majorant になる。

証明は $\beta^\pm$ の巾級数展開の係数が(B.P.)より求まる事を二重帰納法で示せばよい。

Lemma 3.3. $g(s)$ $(s\in\mathbb{C}^1)$, $f(t,x,\tau)$ を原点の近傍で正則な関数とし, $\tilde{f}(t_1,x,t_2) = f(t_1+t_2, x, t_1-t_2)$ とかく事にする。このとき,

(a) $\tilde{f}(t_1, x, t_2) \ll \varphi(\gamma(t_1+t_2)+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu) \Rightarrow f(t, x, \pm t) \ll \varphi(\gamma t+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu)$

(b) $f(t, x, t) \ll \varphi(\gamma t+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu) \Rightarrow \tilde{f}(t_1, x, 0) \ll \varphi(\gamma t_1+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu)$

(c) $f(t, x, -t) \ll \varphi(\gamma t+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu) \Rightarrow \tilde{f}(0, x, t_2) \ll \varphi(\gamma t_2+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu)$ 。

証明は殆んど明らか。

<u>lemma 3.4.</u> $\varphi_j(\zeta) \equiv \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^j \frac{1}{(r-\zeta)} = \frac{j!}{(r-\zeta)^{j+1}}$ $(j=0,1,2,\cdots)$ と定めると、$\varphi_j(\zeta) \ll \frac{r}{j+1}\varphi_{j+1}(\zeta)$ $(j=0,1,2,\cdots)$ 。但し、$\zeta = \gamma t+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu$ or $\zeta = \gamma(t_1+t_2)+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu$ 。

証明は殆んど明らか。

lemma 3.2 , lemma 3.3 , lemma 3.4 に注意して Wagschal (7) p388−390 にならって計算すると次の lemma を得る。

<u>lemma 3.5.</u> $h_j^{\pm}(t,x) = \sum_{l=1}^{k-2} \sigma_{j,l}^{\pm}(t,x) R^l(t,x;\nabla_x\varphi^{\pm}(t,x))$, $h_j^{i}(t,x) = \sum_{l=1}^{k-2} \sigma_{j,l}^{i}(t,x) \times R^l(t,x;\nabla_x\varphi^{i}(t,x)) + \sigma_{j,k-1}^{i}(t,x) R^{+}(t,x;\nabla_x\varphi^{i}(t,x)) + \sigma_{j,k}^{i}(t,x) R^{-}(t,x;\nabla_x\varphi^{i}(t,x))$ とおく。このとき、$\exists R>0$, $\exists \gamma>0$, $\exists c_0>0$, $\exists c_1>0$;

$$\sigma_{j+1,l}^{\pm} \ll 3c_0 c_1^{2j+2}\frac{\varphi_{2j+1}}{j!} , \quad \sigma_{j+1,l}^{i} \ll 2c_0 c_1^{2j+2}\frac{\varphi_{2j+1}}{j!}$$

$$\alpha_j^{\pm} \ll c_1^{2j+1}\frac{\varphi_{2j}}{j!} , \quad \alpha_j^{i} \ll c_1^{2j+1}\frac{\varphi_{2j}}{j!} , \quad \beta_j^{\pm} \ll c_1^{2j+2}\frac{\varphi_{2j+1}}{j!}$$

for $0<r<R$, $j\geq 0$ 。但し、$\varphi_j = \varphi_j(\gamma t+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu)$ or $\varphi_j = \varphi_j(\gamma(t_1+t_2)+\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu)$ 。

さて (3.2) の項を形式的にまとめ直すと、

$$(3.8)\quad u(t,x) = \frac{F^{+}(t,x)}{[\varphi^{+}]^{q}} + (\log\varphi^{+})\left\{\sum_{j=q}^{\infty}\frac{[\varphi^{+}]^{j-q}}{(j-q)!}a_j^{+}\right\} - \sum_{j=q+1}^{\infty} A_{j-q}\frac{[\varphi^{+}]^{j-q}}{(j-q)!}a_j^{+} +$$

$$+ \frac{F^{-}(t,x)}{[\varphi^{-}]^{q}} + (\log\varphi^{-})\left\{\sum_{j=q}^{\infty}\frac{[\varphi^{-}]^{j-q}}{(j-q)!}a_j^{-}\right\} - \sum_{j=q+1}^{\infty} A_{j-q}\frac{[\varphi^{-}]^{j-q}}{(j-q)!}a_j^{-} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k-2}\Big[\frac{F^{i}(t,x)}{[\varphi^{i}]^{q}}+(\log\varphi^{i})\Big\{\sum_{j=q}^{\infty}\frac{[\varphi^{i}]^{j-q}}{(j-q)!}a_j^{i}\Big\}-\sum_{j=q+1}^{\infty}A_{j-q}\frac{[\varphi^{i}]^{j-q}}{(j-q)!}a_j^{i}\Big]+$$

$$+\int_{-t}^{t}\frac{F(t,x,\tau)}{[\Phi]^{q}}d\tau+\int_{-t}^{t}\Big[(\log\Phi)\Big\{\sum_{j=q}^{\infty}\frac{[\Phi]^{j-q}}{(j-q)!}b_j\Big\}-\sum_{j=q+1}^{\infty}A_{j-q}\frac{[\Phi]^{j-q}}{(j-q)!}b_j\Big]d\tau$$

となる。但し、$F^{\pm}$, F は原点の近傍で正則なベクトル値関数である。(3.8) の右辺の各級数の収束性及び漸近解 (3.2) が方程式 (2.1) をみたす事は lemma 3.4 (key lemma) より容易に証明できる。

(iii). **(2.2)** の右辺の積分の解釈。 部分積分すると、

$$\int_{-t}^{t}G(t,x,\tau)\log\Phi(t,x,\tau)\,d\tau=\log\varphi^{+}(t,x)\int_{0}^{t}G(t,x,\tau)\,d\tau+\log\varphi^{-}(t,x)\times$$

$$\times\int_{-t}^{0}G(t,x,\tau)\,d\tau-\int_{-t}^{t}\Big\{\int_{0}^{\tau}G(t,x,\sigma)\,d\sigma\Big\}\frac{\Phi_\tau(t,x,\tau)}{\Phi(t,x,\tau)}\,d\tau$$ 。従って、積分

$$I_q(t,x)=\int_{-t}^{t}\frac{F(t,x,\tau)}{[\Phi(t,x,\tau)]^{q}}d\tau=\int_{-t}^{t}\frac{H(t,x,\tau)}{[\prod_{i=1}^{n}P_i(t,x,\tau)^{n_i}]^{q}}d\tau\ ,\quad H(t,x,\tau)=F(t,x,\tau)\times$$

$\times[\Phi(t,x,\tau)]^{-q}$ について調べれば十分である。それには良く知られた次の事実：「d 次の擬多項式 D と e 次の擬多項式 E の終結式を ω とすれば、高々 $e-1$ 次及び $d-1$ 次の適当な擬多項式 A, B を選んで $AD+BE=\omega$ となる様に出来る。」を使って、1変数の場合の有理関数の積分の理論にのせればよい。

§4．3つの特性根 $\lambda^i(t,x;\xi)$ $(1\le i\le 3)$ がくっつく場合。

方程式(2.1)に対して§2の仮定(イ)～(ホ)に当然の変更を加えたものを仮定する。以下記述を簡単にする為，特性根 λ^i $(1\le i\le 3)$ に対応する部分に限って話をする。

phase $F^i(t,x)$ $(1\le i\le 3)$ 及び multiphase $F^{ij}(t,x;s_1)$ $(1\le i<j\le 3)$，$F^{123}(t,x;s_1,s_2)$ を

$$(4.1)\begin{cases} F^i_t=\lambda^i(t,x;\nabla_x F^i), \quad F^i(0,x)=x_1 \quad (1\le i\le 3) \\ F^{ij}_t=\lambda^j(t,x;\nabla_x F^{ij}), \quad F^{ij}(s_1,x;s_1)=F^i(s_1,x) \quad (1\le i<j\le 3) \\ F^{123}_t=\lambda^3(t,x;\nabla_x F^{123}), \quad F^{123}(s_2,x;s_1,s_2)=F^{12}(s_2,x;s_1) \end{cases}$$

により定める。（注；前の場合では $F(t,x;s)=\Phi(t,x;2s-t)$ と定めると，$F_t=\lambda^-(t,x;\nabla_x F)$ $F(s,x;s)=\varphi^+(s,x)$ となる。）

eigenvalue λ^i $(1\le i\le 3)$ に対応する eigenvector を R^i $(1\le i\le 3)$ とし

，$b^{ij}_k(t,x;s_1)=\beta^{ij}_{ki}(t,x;s_1)R^i(t,x;\nabla_x F^{ij}(t,x;s_1))+\beta^{ij}_{kj}R^j$，

$c_k(t,x;s_1,s_2)=\gamma^1_k(t,x;s_1,s_2)R^1(t,x;\nabla_x F^{123}(t,x;s_1,s_2))+\gamma^2_k R^2+\gamma^3_k R^3$

とおくと方程式(2.1)（or コーシー問題(C.P.)′）は，次の様な漸近解をもつ事が示せる。即ち，

$$(4.2)\ u(t,x)=\sum_{j=0}^{\infty}[f_j(F^1(t,x))a^1_j(t,x)+f_j(F^2(t,x))a^2_j(t,x))a^2_j(t,x)+$$

$$+f_j(F^3(t,x))a^3_j(t,x)+\int_0^t f_j(F^{12}(t,x;s_1))b^{12}_j(t,x;s_1)ds_1+\int_0^t f_j(F^{13}(t,x;s_1))\times$$

$$\times b^{13}_j(t,x;s_1)ds_1+\int_0^t f_j(F^{23}(t,x;s_1))b^{23}_j(t,x;s_1)ds_1+\int_0^t\int_0^{s_2} f_j(F^{123}(t,x;s_1,s_2))\times$$

$\times\, C_j(t,x;s_1,s_2)\,ds_1 ds_2]$。 漸化式は少し複雑になるが，本質的には前と同じtypeをしている。従って漸近解(4.2)のexactnessも前と同様にして示せる。残るは，積分 $\int_0^t\int_0^{s_2}\frac{G(t,x;s_1,s_2)}{F^{123}(t,x;s_1,s_2)}ds_1 ds_2$ where Gは原点で正則な関数 の解釈（即ち singularity, ramification などを調べる事）であるが，これは今の所未解決である。

計算の規則性から，任意ケ数の特性根がくっつく場合へ一般化する事はそれ程難しくはないと思われる。

参考文献

(1) R. Courant and P.D. Lax, The propagation of discontinuities in wave motion, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 42, 1956, p812-876.

(2) B. Granoff and D. Ludwig, Propagation of singularities along characteristics with nonuniform multiplicities, J. Math. Anal. Appl., Vol. 21, 1968, p. 556-574

(3) Y. Hamada, The singularities of the solutions of the Cauchy problem, Publ. RIMS. Kyoto Univ. Vol. 5, 1969, p21-40

(4) D. Ludwig, Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, Comm. Pure Appl. Math. Vol. XIII, 1960, p473-508.

(5) J-C. De Paris, Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur, J. Math. pure et appl., 51, 1972, p465-488

(6) 浦部治一郎；ある種の線型方程式（2変数）に対する浜田の定理について．

(7) C. Wagschal, Problème de Cauchy analytique à données méromorphes, J. Math. pure et appl., 51, 1972, p375-397